An approximation to a percentage point of the distribution of the kurtosis statistic b_2

数理解析研究所講究録
1007 巻 1997 年 173-185

An approximation to a percentage point of the distribution of the kurtosis statistic b_2

筑波大・数学　高橋 邦彦 (Kunihiko Takahashi)
筑波大・数学　赤平 昌文 (Masafumi Akahira)

1. はじめに

統計的推測において, 正規母集団からの標本に基づく最適な推定方式が, 母集団分布が非正規分布であるときには必ずしも良いとは限らない. このようなことを改善するために多くの様々な robustness の議論がなされてはいるが, 母集団分布が正規分布であるかどうかという正規性の検定は重要である. 本論では正規性の検定において重要な役割を果たす正規標本 $X_1, \cdots, X_n$に基づく尖度統計量

$$b_2 = n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^4 \Big/ \left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right\}^2$$

を取り上げる. ただし $\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n$ とする. そして b_2の分布のパーセント点の近似について考察する.

2. 歪度統計量 $\sqrt{b_1}$ と尖度統計量 b_2

分布の非対称性, 裾の長さを表わす尺度として分布の平均の周りでの r次のモーメントを μ_rとするとき

(2.1) $$\sqrt{\beta_1} := \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}, \qquad \beta_2 := \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

が良く知られ, それぞれ分布の歪度 (skewness), 尖度 (kurtosis) という. 特に正規分布の場合には $\sqrt{\beta_1} = 0$, $\beta_2 = 3$ になる.

いま $X_1, \cdots, X_n$ を分布関数 $F(\cdot)$ からの無作為標本とする. ここで $\Phi(\cdot)$ を標準正規分布関数とするとき, 帰無仮説 $H : F(x) \equiv \Phi((x-\mu)/\sigma)$ を検定する問題を考える. 各 $r = 2, 3, \cdots$について m_r を $m_r := (1/n)\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^r$ で定義し, (2.1) において μ_rの代わりに m_rとして得られた統計量

$$\sqrt{b_1} := \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \qquad b_2 := \frac{m_4}{m_2^2}$$

をそれぞれ歪度統計量, 尖度統計量という ([S81], [PR96]). これらはそれぞれ $\sqrt{\beta_1}$, β_2に関して一致性をもつことに注意. このとき仮説Hの検定については $|\sqrt{b_1}| > c$ または $|b_2-3| > c'$ のときにHを棄却すればよいことが分かる. そのような場合に $\sqrt{b_1}$, b_2の分布のパーセント点が必要になるが, 直接的に Cornish-Fisher 展開を適用したとき, $\sqrt{b_1}$の方は比較的良い近似が得られるが, 残念ながらb_2の方はあまり良い近似ではなくなる ([S81]). そこで, b_1, b_2を逆双曲線正弦関数を用いて変換して正規近似する方法 ([J49]) や, $\sqrt{b_1}$, b_2の分布を Pearson 系の分布にあてはめる方法 ([P65]) でパーセント点等を求めることが良く知られているが, その導出の意味が必ずしも明確であるとはいえない. 本論では非心t分布のパーセント点の近似を求めた方法 ([A95]) と類似の方法でb_2の分布のパーセント点の近似について考察する.

3. b_2の分布のパーセント点の近似式

本論では仮説Hの下でb_2の分布を考える. Hの下ではb_2とm_2は互いに独立になり, またb_2が母数に無関係であることに注意して$\mu = 0$, $\sigma = 1$と仮定する. そこでkを正数にとって固定し, 任意の$c > 0$に対して

$$P\{b_2 \le c\} = P\left\{\frac{m_4}{{m_2}^2} \le c\right\} = P\left\{\left(\frac{m_4}{{m_2}^2}\right)^{1/k} \le c^{1/k}\right\} = P\left\{m_4^{1/k} - c^{1/k} m_2^{2/k} \le 0\right\} \tag{3.1}$$

なる $1/k$乗変換を考える. 次に

$$Y := m_4^{1/k} - c^{1/k} m_2^{2/k} \tag{3.2}$$

とおいて, Yのモーメントを求める. まず, 任意の$\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$について

$$E\left[m_4^{\alpha} m_2^{\beta}\right] = E\left[b_2^{\alpha} m_2^{2\alpha+\beta}\right] = E\left[b_2^{\alpha}\right] E\left[m_2^{2\alpha+\beta}\right] \tag{3.3}$$

になる. また, Hsu and Lawley [HL39] の結果を用いて

$$\mu := E(b_2) = \frac{3(n-1)}{n+1} = 3 - \frac{6}{n+1},$$

$$\gamma_2 := E\left[\left(\frac{b_2-\mu}{\mu}\right)^2\right] = \frac{8n(n-2)(n-3)}{3(n-1)^2(n+3)(n+5)} = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\gamma_3 := E\left[\left(\frac{b_2-\mu}{\mu}\right)^3\right] = \frac{64n(n-2)(n-3)(n^2-5n+2)}{(n-1)^3(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\gamma_4 := E\left[\left(\frac{b_2-\mu}{\mu}\right)^4\right]$$

$$= \frac{64n(n-2)(n-3)(n^5+207n^4-1707n^3+4105n^2-1902n+720)}{3(n-1)^4(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)(n+11)(n+13)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\gamma_5 := E\left[\left(\frac{b_2-\mu}{\mu}\right)^5\right] = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

になるから, 任意の$\alpha > 0$に対して

$$E\left(b_2^\alpha\right) = E\left[\mu^\alpha\left(1+\frac{b_2-\mu}{\mu}\right)^\alpha\right] \tag{3.4}$$
$$= \mu^\alpha\left\{1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\gamma_2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}\gamma_3 + \frac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)\gamma_4 + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}$$

を得る. 一方, 任意の$\ell \geq 0$に対して

$$E\left[m_2^\ell\right] = \left(\frac{2}{n}\right)^\ell \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}+\ell\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \tag{3.5}$$

になる. ただし$\Gamma(\cdot)$はガンマ関数とする. そこで$a = c^{1/k}$とおくとYのモーメントは次のようになる.

$$\begin{aligned}
\mu_1 &:= E(Y) = E\left(m_2^{2/k}\right)\left\{E\left(b_2^{1/k}\right)-a\right\},\\
\mu_2 &:= E(Y^2) = E\left(m_2^{4/k}\right)\left\{E\left(b_2^{2/k}\right)-2aE\left(b_2^{1/k}\right)+a^2\right\},\\
\mu_3 &:= E(Y^3) = E\left(m_2^{6/k}\right)\left\{E\left(b_2^{3/k}\right)-3aE\left(b_2^{2/k}\right)+3a^2E\left(b_2^{1/k}\right)-a^3\right\},\\
\mu_4 &:= E(Y^4) = E\left(m_2^{8/k}\right)\left\{E\left(b_2^{4/k}\right)-4aE\left(b_2^{3/k}\right)+6a^2E\left(b_2^{2/k}\right)-4a^3E\left(b_2^{1/k}\right)+a^4\right\}.
\end{aligned}$$

ここで, それぞれの値については, (3.4), (3.5) からその近似値が求められる.

さらに (3.1) から任意の$\alpha (0 < \alpha < 1)$に対して

$$1-\alpha = P\{b_2 \leq c\} = P\{Y \leq 0\} = P\left\{\frac{Y-\mu_1}{\sigma_Y} \leq -\frac{\mu_1}{\sigma_Y}\right\} \tag{3.6}$$

になる. ただし$\sigma_Y := \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{\mathrm{Var}(Y)} = \sqrt{\mu_2-\mu_1^2}$とする. このとき

$$W := \frac{Y-\mu_1}{\sigma_Y} \tag{3.7}$$

とおけば, $E(W)=0$, $\mathrm{Var}(W)=1$でWの3次, 4次のキュムラントは

$$\kappa_3(W) = \frac{1}{\sigma_Y^3}\left(\mu_3-3\mu_1\mu_2+2\mu_1^3\right),$$
$$\kappa_4(W) = \frac{1}{\sigma_Y^4}\left(\mu_4-4\mu_3\mu_1-3\mu_2^2+12\mu_2\mu_1^2-6\mu_1^4\right)$$

になる．従って (3.6) において Cornish-Fisher 展開を用いて次のことを得る．

定理. b_2の分布の上側 $100\alpha\%$点 $c = c_\alpha$は次の近似式から求められる．

$$
(3.8) \qquad -\frac{\mu_1}{\sigma_Y} = u_\alpha + \frac{1}{6}\kappa_3(W)\left(u_\alpha^2 - 1\right) + \frac{1}{24}\kappa_4(W)\left(u_\alpha^3 - 3u_\alpha\right) - \frac{1}{36}\kappa_3^2(W)\left(2u_\alpha^3 - 5u_\alpha\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
$$

ただし u_αは標準正規分布 $N(0,1)$ の上側 $100\alpha\%$点とする．

系. b_2の分布の上側 $100\alpha\%$点 $c = c_\alpha$の近似値は

$$
(3.9) \qquad \left\{\mu_1\sigma_Y^2 + \frac{1}{6}\sigma_Y^3\kappa_3(W)\left(u_\alpha^2 - 1\right)\right\}^2 = \sigma_Y^6 u_\alpha^2
$$

の解として得られる．

注意. b_2の分布の下側 $100\alpha\%$点 $c = c_{1-\alpha}$の近似値は (3.8), (3.9) においてαを $1-\alpha$として得ることができる．

4. 数値的検討

前節において求めた近似式 (3.9) を用い $k = 2, 4, 6, 8$ の場合に b_2の分布の上側 (下側)1%, 5%の値を計算する．その際 Pearson and Hartley[PH76] において Pearson 系の分布への当てはめによって 20(10)50, 75(25)200, 250, 300(100)1000, 2000 の場合に b_2の分布の上側 (下側)1%, 5%の値が与えられているので，それらを対象値として差を求める (表 1〜8)．その結果, $k = 2$ の場合が比較的安定しているように見える．

表 1. b_2の分布の上側パーセント点の値 ($k = 2$)

n	上側 1%点			上側 5%点		
	[PH76]	(3.9)	差	[PH76]	(3.9)	差
20	5.38	4.58207	−0.798	4.18	4.10029	−0.080
30	5.20	4.59818	−0.602	4.12	4.07380	−0.046
40	5.04	4.56571	−0.474	4.06	4.02811	−0.032
50	4.88	4.51570	−0.364	4.00	3.98064	−0.019
75	4.59	4.37668	−0.213	3.87	3.87473	0.005
100	4.39	4.25199	−0.138	3.77	3.79075	0.021
125	4.24	4.14828	−0.092	3.70	3.72435	0.024
150	4.13	4.06259	−0.067	3.65	3.67086	0.021
175	4.04	3.99114	−0.049	3.61	3.62686	0.017
200	3.98	3.93079	−0.049	3.57	3.58999	0.020
250	3.87	3.83450	−0.035	3.52	3.53148	0.011
300	3.79	3.76092	−0.029	3.47	3.48685	0.017
400	3.67	3.65518	−0.015	3.41	3.42261	0.013
500	3.60	3.58210	−0.018	3.37	3.37795	0.008
600	3.54	3.52802	−0.012	3.34	3.34470	0.005
700	3.50	3.48606	−0.014	3.31	3.31875	0.009
800	3.46	3.45235	−0.008	3.29	3.29778	0.008
900	3.43	3.42453	−0.005	3.28	3.28040	0.000
1000	3.41	3.40110	−0.009	3.26	3.26569	0.006
2000	3.28	3.27646	−0.004	3.18	3.18626	0.006

表 2. b_2の分布の下側パーセント点の値 $(k=2)$

n	下側 1%点			下側 5%点		
	[PH76]	(3.9)	差	[PH76]	(3.9)	差
20	1.64	1.37546	−0.265	1.83	1.58608	−0.244
30	1.79	1.56360	−0.226	1.98	1.78452	−0.195
40	1.89	1.72798	−0.162	2.07	1.93079	−0.139
50	1.95	1.85523	−0.095	2.15	2.03849	−0.112
75	2.08	2.06060	−0.019	2.27	2.21051	−0.059
100	2.18	2.17941	−0.001	2.35	2.31224	−0.038
125	2.24	2.25732	0.017	2.40	2.38067	−0.019
150	2.29	2.31334	0.023	2.45	2.43075	−0.019
175	2.34	2.35627	0.016	2.48	2.46954	−0.010
200	2.37	2.39070	0.021	2.51	2.50081	−0.009
250	2.42	2.44350	0.024	2.55	2.54879	−0.001
300	2.46	2.48296	0.023	2.59	2.58450	−0.005
400	2.52	2.53974	0.020	2.64	2.63529	−0.005
500	2.57	2.57984	0.010	2.67	2.67054	0.001
600	2.60	2.61035	0.010	2.70	2.69695	−0.003
700	2.62	2.63468	0.015	2.72	2.71773	−0.002
800	2.65	2.65471	0.005	2.74	2.73465	−0.005
900	2.66	2.67162	0.012	2.75	2.74879	−0.001
1000	2.68	2.68615	0.006	2.76	2.76084	0.001
2000	2.77	2.76880	−0.001	2.83	2.82760	−0.002

表 3. b_2の分布の上側パーセント点の値 ($k = 4$)

n	上側 1%点			上側 5%点		
	[PH76]	(3.9)	差	[PH76]	(3.9)	差
20	5.38	4.27664	−1.103	4.18	3.92368	−0.256
30	5.20	4.29872	−0.901	4.12	3.92393	−0.196
40	5.04	4.31683	−0.723	4.06	3.90484	−0.155
50	4.88	4.31751	−0.562	4.00	3.88010	−0.120
75	4.59	4.26532	−0.325	3.87	3.81246	−0.058
100	4.39	4.18537	−0.205	3.77	3.74939	−0.021
125	4.24	4.10564	−0.134	3.70	3.69509	−0.005
150	4.13	4.03374	−0.096	3.65	3.64910	−0.001
175	4.04	3.97074	−0.069	3.61	3.61005	0.000
200	3.98	3.91586	−0.064	3.57	3.57661	0.007
250	3.87	3.82585	−0.044	3.52	3.52239	0.002
300	3.79	3.75551	−0.034	3.47	3.48026	0.010
400	3.67	3.65276	−0.017	3.41	3.41865	0.009
500	3.60	3.58089	−0.019	3.37	3.37529	0.005
600	3.54	3.52740	−0.013	3.34	3.34278	0.003
700	3.50	3.48574	−0.014	3.31	3.31729	0.007
800	3.46	3.45220	−0.008	3.29	3.29663	0.007
900	3.43	3.42449	−0.006	3.28	3.27947	−0.001
1000	3.41	3.40113	−0.009	3.26	3.26492	0.005
2000	3.28	3.27658	−0.003	3.18	3.18603	0.006

表 4. b_2の分布の下側パーセント点の値 ($k = 4$)

n	下側 1%点			下側 5%点		
	[PH76]	(3.9)	差	[PH76]	(3.9)	差
20	1.64	1.12160	−0.518	1.83	1.50829	−0.322
30	1.79	1.32690	−0.463	1.98	1.70198	−0.278
40	1.89	1.51761	−0.372	2.07	1.85739	−0.213
50	1.95	1.67371	−0.276	2.15	1.97656	−0.173
75	2.08	1.93836	−0.142	2.27	2.17146	−0.099
100	2.18	2.09453	−0.085	2.35	2.28669	−0.063
125	2.24	2.19561	−0.044	2.40	2.36307	−0.037
150	2.29	2.26659	−0.023	2.45	2.41807	−0.032
175	2.34	2.31965	−0.020	2.48	2.46006	−0.020
200	2.37	2.36121	−0.009	2.51	2.49351	−0.016
250	2.42	2.42313	0.003	2.55	2.54415	−0.006
300	2.46	2.46799	0.008	2.59	2.58134	−0.009
400	2.52	2.53058	0.011	2.64	2.63361	−0.006
500	2.57	2.57361	0.004	2.67	2.66954	−0.000
600	2.60	2.60580	0.006	2.70	2.69631	−0.004
700	2.62	2.63118	0.011	2.72	2.71729	−0.003
800	2.65	2.65194	0.002	2.74	2.73434	−0.006
900	2.66	2.66935	0.009	2.75	2.74856	−0.001
1000	2.68	2.68425	0.004	2.76	2.76067	0.001
2000	2.77	2.76822	−0.002	2.83	2.82759	−0.002

表 5. b_2の分布の上側パーセント点の値 ($k = 6$)

n	上側 1%点			上側 5%点		
	[PH76]	(3.9)	差	[PH76]	(3.9)	差
20	5.38	4.18014	−1.200	4.18	3.88490	−0.295
30	5.20	4.19615	−1.004	4.12	3.88550	−0.234
40	5.04	4.22436	−0.816	4.06	3.86991	−0.190
50	4.88	4.23921	−0.641	4.00	3.84980	−0.150
75	4.59	4.21682	−0.373	3.87	3.79224	−0.078
100	4.39	4.15460	−0.235	3.77	3.73556	−0.034
125	4.24	4.08507	−0.155	3.70	3.68518	−0.015
150	4.13	4.01930	−0.111	3.65	3.64170	−0.008
175	4.04	3.96019	−0.080	3.61	3.60432	−0.006
200	3.98	3.90790	−0.072	3.57	3.57204	0.002
250	3.87	3.82094	−0.049	3.52	3.51929	−0.001
300	3.79	3.75225	−0.038	3.47	3.47802	0.008
400	3.67	3.65108	−0.019	3.41	3.41731	0.007
500	3.60	3.57991	−0.020	3.37	3.37440	0.004
600	3.54	3.52677	−0.013	3.34	3.34214	0.002
700	3.50	3.48532	−0.015	3.31	3.31681	0.007
800	3.46	3.45191	−0.008	3.29	3.29625	0.006
900	3.43	3.42428	−0.006	3.28	3.27916	−0.001
1000	3.41	3.40097	−0.009	3.26	3.26466	0.005
2000	3.28	3.27656	−0.003	3.18	3.18596	0.006

表 6. b_2の分布の下側パーセント点の値 $(k = 6)$

n	下側 1%点			下側 5%点		
	[PH76]	(3.9)	差	[PH76]	(3.9)	差
20	1.64	1.07359	−0.566	1.83	1.48775	−0.342
30	1.79	1.27566	−0.514	1.98	1.67920	−0.301
40	1.89	1.46805	−0.422	2.07	1.83609	−0.234
50	1.95	1.62832	−0.322	2.15	1.95785	−0.192
75	2.08	1.90497	−0.175	2.27	2.15888	−0.111
100	2.18	2.07032	−0.110	2.35	2.27816	−0.072
125	2.24	2.17760	−0.062	2.40	2.35706	−0.043
150	2.29	2.25276	−0.037	2.45	2.41367	−0.036
175	2.34	2.30873	−0.031	2.48	2.45673	−0.023
200	2.37	2.35238	−0.018	2.51	2.49091	−0.019
250	2.42	2.41700	−0.003	2.55	2.54247	−0.008
300	2.46	2.46348	0.003	2.59	2.58018	−0.010
400	2.52	2.52783	0.008	2.64	2.63298	−0.007
500	2.57	2.57174	0.002	2.67	2.66915	−0.001
600	2.60	2.60444	0.004	2.70	2.69605	−0.004
700	2.62	2.63014	0.010	2.72	2.71711	−0.003
800	2.65	2.65111	0.001	2.74	2.73421	−0.006
900	2.66	2.66868	0.009	2.75	2.74846	−0.002
1000	2.68	2.68370	0.004	2.76	2.76059	0.001
2000	2.77	2.76805	−0.002	2.83	2.82758	−0.002

表 7. b_2の分布の上側パーセント点の値 ($k = 8$)

n	上側 1%点			上側 5%点		
	[PH76]	(3.9)	差	[PH76]	(3.9)	差
20	5.38	4.13500	−1.245	4.18	3.86949	−0.311
30	5.20	4.14659	−1.053	4.12	3.86883	−0.251
40	5.04	4.17822	−0.862	4.06	3.85396	−0.206
50	4.88	4.19915	−0.681	4.00	3.83554	−0.164
75	4.59	4.19099	−0.399	3.87	3.78236	−0.088
100	4.39	4.13783	−0.252	3.77	3.72870	−0.041
125	4.24	4.07369	−0.166	3.70	3.68024	−0.020
150	4.13	4.01123	−0.119	3.65	3.63799	−0.012
175	4.04	3.95424	−0.086	3.61	3.60145	−0.009
200	3.98	3.90336	−0.077	3.57	3.56975	−0.000
250	3.87	3.81811	−0.052	3.52	3.51774	−0.002
300	3.79	3.75034	−0.040	3.47	3.47689	0.007
400	3.67	3.65007	−0.020	3.41	3.41664	0.007
500	3.60	3.57931	−0.021	3.37	3.37395	0.004
600	3.54	3.52638	−0.014	3.34	3.34182	0.002
700	3.50	3.48505	−0.015	3.31	3.31656	0.007
800	3.46	3.45171	−0.008	3.29	3.29606	0.006
900	3.43	3.42413	−0.006	3.28	3.27901	−0.001
1000	3.41	3.40086	−0.010	3.26	3.26454	0.005
2000	3.28	3.27655	−0.003	3.18	3.18592	0.006

表 8. b_2の分布の下側パーセント点の値 ($k=8$)

n	下側 1%点			下側 5%点		
	[PH76]	(3.9)	差	[PH76]	(3.9)	差
20	1.64	1.05357	−0.586	1.83	1.47822	−0.352
30	1.79	1.25399	−0.536	1.98	1.66862	−0.311
40	1.89	1.44654	−0.443	2.07	1.82604	−0.244
50	1.95	1.60816	−0.342	2.15	1.94889	−0.201
75	2.08	1.88961	−0.190	2.27	2.15269	−0.117
100	2.18	2.05898	−0.121	2.35	2.27391	−0.076
125	2.24	2.16907	−0.071	2.40	2.35404	−0.046
150	2.29	2.24618	−0.044	2.45	2.41144	−0.039
175	2.34	2.30351	−0.036	2.48	2.45503	−0.025
200	2.37	2.34815	−0.022	2.51	2.48959	−0.020
250	2.42	2.41406	−0.006	2.55	2.54161	−0.008
300	2.46	2.46131	0.001	2.59	2.57958	−0.010
400	2.52	2.52651	0.007	2.64	2.63265	−0.007
500	2.57	2.57084	0.001	2.67	2.66895	−0.001
600	2.60	2.60379	0.004	2.70	2.69591	−0.004
700	2.62	2.62965	0.010	2.72	2.71702	−0.003
800	2.65	2.65072	0.001	2.74	2.73414	−0.006
900	2.66	2.66836	0.008	2.75	2.74841	−0.002
1000	2.68	2.68343	0.003	2.76	2.76055	0.001
2000	2.77	2.76797	−0.002	2.83	2.82757	−0.002

参考文献

[A95] Akahira, M. (1995). A higher order approximation to a percantage point of the non-central t-distribution. *Commun. Statist.-Simula.*, **24**(3), 595-605.

[HL39] Hsu, C. T. and Lawley, D. N. (1939). The derivation of the fifth and sixth moments of the distribution of b_2 in samples from a normal population. *Biometrika* **31**, 238-248.

[J49] Johnson, N. L. (1949). Systems of frequency curves generated by methods of translations. *Biometrika* **36**, 149-176.

[P30] Pearson, E. S. (1930). A further development of tests for normality. *Biometrika* **22**, 239-249.

[P65] Pearson, E. S. (1965). Tables of percentage points of $\sqrt{b_1}$ and b_2 in normal samples; a rounding off. *Biometrika* **52**, 282-285.

[PH76] Pearson, E. S. and Hartley, H. O. (1976). *Biometrika Tables for Statisticians*, Vol. 1. (3rd ed.), Cambridge University Press.

[PR96] Patel, J. and Read, G. (1996). *Handbook of the Normal Distribution.* (2nd ed.), Marcel Dekker, New York.

[S81] Shibata, Y. (1981). *Normal Distributions.* (In Japanese), Tokyo Univ. Press.